Centres de Gestion
de la Fonction Publique Territoriale
du Grand Ouest
Centre organisateur : CDG 56

TROISIEME CONCOURS
de TECHNICIEN SUPERIEUR TERRITORIAL

Mercredi 14 septembre 2005

MATHEMATIQUES

(durée : 3 heures ; coef. : 3)

Aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, n° de convocation...) ne doit figurer sur les copies, sous peine d'annulation de la participation du candidat.

Il est demandé aux candidats de préciser la méthode utilisée, de détailler les calculs et de donner les résultats exacts. Tout résultat non justifié sera considéré comme nul.

Les feuilles de brouillon (de couleur) jointes aux copies par les candidats ne seront pas notées par les correcteurs.

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions prévues aux concours et examens de l'Education Nationale, à savoir sans imprimante, de fonctionnement autonome.

Préambule : il est demandé au candidat de préciser la méthode utilisée, de détailler les calculs et de donner les résultats exacts. Tout résultat non justifié sera considéré comme nul.

SUJET :

PROBLEME I (13 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 4\frac{e^x}{e^x + 1}$$

On désigne par *(C)* sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O ; unité *1 cm.*

1. Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b, que l'on déterminera, tels que :

$$f(x) = a + \frac{b}{e^x + 1}$$

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

En déduire que la courbe *(C)* admet une asymptote (Δ) dont on donnera une équation.

3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

En déduire que la courbe *(C)* admet une asymptote (Δ') que l'on précisera.

4. a) Calculer la dérivée f' de f. Préciser le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

5. Soit A le point de *(C)* d'abscisse $x = 0$. Déterminer une équation de la tangente en A à la courbe *(C)*.

6. Construire la courbe *(C)*, sa tangente en A et ses asymptotes sur le même graphique.

7. Calculer l'aire S du domaine compris entre la courbe *(C)*, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. On pourra remarquer que le numérateur de $\frac{1}{4}f(x)$ est la dérivée de son dénominateur.

PROBLEME II (7 points)

On lance deux dés : un rouge et un vert ; les faces de chaque dé sont numérotées de *1* à *6*. Les résultats possibles sont équiprobables.

1. a) Calculer la probabilité d'obtenir deux numéros *6*.

b) Calculer la probabilité d'obtenir un seul numéro *6*.

c) Calculer la probabilité d'obtenir deux numéros identiques.

d) Calculer la probabilité d'obtenir deux numéros différents.

2. On considère les événements suivants :

- A : « La somme des deux numéros obtenus est égale à *4*».
- B : « La somme des deux numéros obtenus est inférieure ou égale à *4*».
- C : « La somme des deux numéros obtenus est supérieure ou égale à *4*».

a) Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, et C.

b) En déduire la probabilité de chacun des événements :

$$A \cap C, B \cap C, A \cup C, B \cup C$$